GROUPE C

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Préambule

Dans le problème nous noterons Z l'ensemble des entiers relatifs, N l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble N privé de 0. Les lettres k, l, m, n désigneront toujours des éléments de N, t un réel.

Le problème se compose de deux parties indépendantes. Par contre la question préliminaire peut être utilisée dans chacune de ces parties.

Question préliminaire

Soit X une variable aléatoire positive ou nulle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que pour tout réel a strictement positif

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} E(X).$$

PREMIÈRE PARTIE

I

1° On considère l'application $Q : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$Q(k, l) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = l \\ \frac{l+1}{4(k+1)} & \text{si } |k-l| = 1 \\ 0 & \text{si } |k-l| \geqslant 2. \end{cases}$$

On définit par récurrence une suite $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ d'applications de N dans R par :

$$p_0(0) = 1, \quad p_0(k) = 0 \text{ si } k \neq 0$$

et
$$p_{n+1}(l) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_n(k)\, Q(k, l).$$

Montrer que $p_n(l)$ est nul si l est strictement supérieur à n.

2° Vérifier les relations suivantes :

a. $2 \cos t \sin(k+1)t = \sin kt + \sin(k+2)t$

b. $\left(\cos \frac{t}{2}\right)^2 \frac{\sin(k+1)t}{k+1} = \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\sin(l+1)t}{l+1} Q(k, l)$

c. $\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2n} \sin t = \sum_{l \in \mathbb{N}} p_n(l) \frac{\sin(l+1)t}{l+1}$

d. $\left(\text{ch} \frac{t}{2}\right)^{2n} \text{sh}\, t = \sum_{l \in \mathbb{N}} p_n(l) \frac{\text{sh}(l+1)t}{l+1}.$

. . . / . . .

3° Calculer :

$$\int_0^{\pi} \sin kt \sin lt \, dt .$$

En déduire que :

$$p_n(l) = \frac{2(l+1)}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \cos \frac{t}{2} \right\}^{2n} \sin t \sin (l+1)\, t \, dt .$$

II

1° *a.* Montrer que pour $|t| < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos t = e^{-t^2/2} \, e^{-\frac{t^4}{12}(1+\varepsilon(t))}$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro quand t tend vers zéro.

b. En déduire qu'il existe un réel r vérifiant $0 < r < \pi$ tel que, si $n > 0$ et $|t| \leqslant r\sqrt{n}$,

$$\left| \left(\cos \frac{t}{2\sqrt{n}} \right)^{2n} - e^{-t^2/4} \right| \leqslant e^{-t^2/4} \left\{ 1 - e^{-t^4/n} \right\} .$$

c. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{r\sqrt{n}} t^2 \left\{ \cos \frac{t}{2\sqrt{n}} \right\}^{2n} dt .$$

2° *a.* Montrer que pour tout r de $]0, \pi[$ il existe un réel s de $]0, 1[$ tel que, si t est dans $[r, \pi]$,

$$\left(\cos \frac{t}{2} \right)^2 \leqslant s .$$

En déduire que :

$$\pi n^{3/2} \, p_n(0) - 2n \int_0^{r\sqrt{n}} \left(\cos \frac{t}{2\sqrt{n}} \right)^{2n} \left(\sin \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 dt$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

b. Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$

$$|(\sin t)^2 - t^2| \leqslant t^3 .$$

c. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{3/2} \, p_n(0) .$$

III

1° Pour tout réel strictement positif a on considère l'application $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_a(x) = \frac{\operatorname{sh}[(x+1)a]}{(x+1)\operatorname{sh} a} \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 .$$

a. Montrer que φ_a est une application croissante.

b. Vérifier que $\varphi_a(x) \geqslant \dfrac{e^{ax}}{1+x}$ si $x \geqslant 0$.

2° Montrer que pour tout n, p_n définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

3° Considérons une suite $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant

$$P(U_n = k) = p_n(k) \quad \text{pour} \quad (k, n) \text{ dans } \mathbb{N} \times \mathbb{N} .$$

Soit ε un réel strictement positif. Montrer que pour tout $a > 0$

$$P(U_n \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varphi_a(n\varepsilon)} \, E\{\varphi_a(U_n)\} .$$

En déduire qu'il existe deux réels A et ρ, $A > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$P\left(\frac{U_n}{n} \geqslant \varepsilon \right) \leqslant A \rho^n .$$

.../...

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.

Soit K un entier positif et μ une probabilité sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mu(\{x\})$ est nul si x est un entier relatif vérifiant $|x| > K$. Considérons une suite $\{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi μ. Ceci signifie que pour tout n, si x_1, x_2 ,..., x_n sont dans $\mathbb{Z}$,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mu(\{x_1\})\ \mu(\{x_2\}) \ldots \mu(\{x_n\}).$$

D'après l'hypothèse faite sur μ on peut supposer que pour tout n, $|X_n| \leqslant K$.

Si A est une partie de Ω on note 1_A l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par $1_A(\omega) = 1$ si ω est dans A, $1_A(\omega) = 0$ sinon.

On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

I

1° Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$E\{f(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n)\} = E\{f(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1)\}.$$

2° Pour tout n on pose :

$$A_n = \{\omega \in \Omega ; S_n(\omega) \neq S_0(\omega), S_n(\omega) \neq S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega) \neq S_{n-1}(\omega)\}$$

$$B_n = \{\omega \in \Omega ; S_1(\omega) \neq 0, S_2(\omega) \neq 0, \ldots, S_n(\omega) \neq 0\}$$

autrement dit :

$$A_n = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{S_n \neq S_k\} \qquad \text{et} \qquad B_n = \bigcap_{k=1}^{n} \{S_k \neq 0\}$$

a. Montrer que pour tout n, $P(A_n) = P(B_n)$.

b. En déduire que la suite de réels $\{P(A_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ converge.

Dorénavant on notera α la limite de cette suite.

3° Pour chaque n on définit la variable aléatoire R_n par :

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$$

a. Montrer que pour tout ω de Ω, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'éléments distincts de l'ensemble $\{S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}$. Calculer $P(R_n = 1)$.

b. Montrer que si $1 \leqslant m \leqslant n$

$$n\alpha \leqslant E(R_n) - 1 \leqslant \sum_{k=1}^{m} P(A_k) + (n - m) P(A_{m+1}).$$

En déduire que $\frac{1}{n} E(R_n)$ tend vers α quand n tend vers l'infini.

c. Montrer que si α est nul, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\frac{R_n}{n} \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers zéro, quand n tend vers l'infini.

d. Vérifier que réciproquement, si pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\frac{R_n}{n} \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, alors α est nul.

II

Dans tout ce paragraphe on suppose que $E(X_1)$ est strictement positif.

1° Pour tout réel t on pose $\varphi(t) = E\{e^{-tX_1}\}$.

a. Montrer que si $t \geqslant 0$

$$P(S_n \leqslant 0) \leqslant E\{e^{-tS_n}\} \leqslant \varphi(t)^n.$$

b. En étudiant la fonction φ au voisinage de zéro, en déduire qu'il existe un réel r vérifiant $0 < r < 1$ tel que pour tout entier n,

$$P(S_n \leqslant 0) \leqslant r^n.$$

.../...

2° Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ définissons les variables aléatoires I_n et M_n par, si ω est dans Ω,

$$I_n(\omega) = \text{Min}\{S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}$$
$$M_n(\omega) = \text{Max}\{S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}$$

($I_n(\omega)$ est donc le plus petit des entiers relatifs $S_0(\omega), \ldots, S_n(\omega)$, $M_n(\omega)$ le plus grand).

a. Montrer que $-nK \leqslant I_n \leqslant 0$.

b. Si p est un entier de $]0, n[$ soit

$$C_p = \bigcup_{i=p+1}^{n} \{\omega \in \Omega;\ S_i(\omega) \leqslant 0\},$$

montrer que $E\left(\frac{I_n}{n}\right) \geqslant -K P(C_p) + \frac{1}{n} E(I_p)$.

c. En déduire que $\frac{1}{n} E(I_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

d. Montrer que si x est un entier négatif

$$P(S_n - M_n < x) = P(I_n < x).$$

e. En déduire que $E(S_n - M_n) = E(I_n)$.

f. Calculer la limite de $\frac{1}{n} E(M_n)$ quand n tend vers l'infini.

g. Majorer R_n en fonction de $M_n - I_n$.

h. Montrer que α est inférieur ou égal à $E(X_1)$.

3° On suppose de plus que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\mu(\{k\})$ est nul.

a. Montrer que pour tout n $R_n \geqslant M_n$.

b. Calculer α en fonction de $E(X_1)$.

III

Dans ce paragraphe on suppose que $E(X_1)$ est nul.

1° *a.* Montrer que si t est un réel strictement positif, il existe un réel r vérifiant $0 < r < 1$ tel que, pour tout entier n,

$$P(S_n \leqslant -nt) \leqslant r^n.$$

b. En déduire que $\frac{1}{n} E(I_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

2° Calculer α.

E.N.S. SEVRES & ULM 1984

GROUPE C

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PRÉAMBULE

Dans le problème nous noterons $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0. Les lettres k, l, m, n désigneront toujours des éléments de $\mathbb{N}$, t un réel.

Le problème se compose de deux parties indépendantes. Par contre la question préliminaire peut être utilisée dans chacune de ces parties.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit X une variable aléatoire positive ou nulle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que pour tout réel a strictement positif

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} E(X).$$

PREMIÈRE PARTIE

I

1° On considère l'application $Q : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$Q(k, l) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = l \\ \frac{l+1}{4(k+1)} & \text{si } |k-l| = 1 \\ 0 & \text{si } |k-l| \geqslant 2. \end{cases}$$

On définit par récurrence une suite $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$p_0(0) = 1, \quad p_0(k) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq 0$$

et
$$p_{n+1}(l) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_n(k)\, Q(k, l).$$

Montrer que $p_n(l)$ est nul si l est strictement supérieur à n.

2° Vérifier les relations suivantes :

a. $2 \cos t \sin(k+1)t = \sin kt + \sin(k+2)t$

b. $\left(\cos \frac{t}{2}\right)^2 \frac{\sin(k+1)t}{k+1} = \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\sin(l+1)t}{l+1} Q(k, l)$

c. $\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2n} \sin t = \sum_{l \in \mathbb{N}} p_n(l) \frac{\sin(l+1)t}{l+1}$

d. $\left(\text{ch} \frac{t}{2}\right)^{2n} \text{sh}\, t = \sum_{l \in \mathbb{N}} p_n(l) \frac{\text{sh}(l+1)t}{l+1}$.

. . . / . . .

3° Calculer :

$$\int_0^{\pi} \sin kt \sin lt \, dt .$$

En déduire que :

$$p_n(l) = \frac{2(l+1)}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \cos \frac{t}{2} \right\}^{2n} \sin t \sin (l+1)\, t \, dt.$$

II

1° *a.* Montrer que pour $|t| < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos t = e^{-t^2/2} \, e^{-\frac{t^4}{12}} (1 + \varepsilon(t))$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro quand t tend vers zéro.

b. En déduire qu'il existe un réel r vérifiant $0 < r < \pi$ tel que, si $n > 0$ et $|t| \leqslant r\sqrt{n}$,

$$\left| \left(\cos \frac{t}{2\sqrt{n}} \right)^{2n} - e^{-t^2/4} \right| \leqslant e^{-t^2/4} \left\{ 1 - e^{-t^4/n} \right\}.$$

c. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{r\sqrt{n}} t^2 \left\{ \cos \frac{t}{2\sqrt{n}} \right\}^{2n} dt .$$

2° *a.* Montrer que pour tout r de $]0, \pi[$ il existe un réel s de $]0, 1[$ tel que, si t est dans $[r, \pi]$,

$$\left(\cos \frac{t}{2} \right)^2 \leqslant s .$$

En déduire que :

$$\pi n^{3/2} \; p_n(0) - 2n \int_0^{r\sqrt{n}} \left(\cos \frac{t}{2\sqrt{n}} \right)^{2n} \left(\sin \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 dt$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

b. Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$

$$\left| (\sin t)^2 - t^2 \right| \leqslant t^3 .$$

c. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{3/2} \; p_n(0) .$$

III

1° Pour tout réel strictement positif a on considère l'application $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_a(x) = \frac{\operatorname{sh}[(x+1)a]}{(x+1)\operatorname{sh} a} \qquad \text{si} \quad x \geqslant 0 .$$

a. Montrer que φ_a est une application croissante.

b. Vérifier que $\varphi_a(x) \geqslant \frac{e^{ax}}{1+x}$ si $x \geqslant 0$.

2° Montrer que pour tout n, p_n définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

3° Considérons une suite $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant

$$P(U_n = k) = p_n(k) \qquad \text{pour} \quad (k, n) \text{ dans } \mathbb{N} \times \mathbb{N} .$$

Soit ε un réel strictement positif. Montrer que pour tout $a > 0$

$$P(U_n \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varphi_a(n\varepsilon)} \; E\{\varphi_a(U_n)\} .$$

En déduire qu'il existe deux réels A et ρ, $A > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$P\left(\frac{U_n}{n} \geqslant \varepsilon \right) \leqslant A \rho^n .$$

.../...

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.

Soit K un entier positif et μ une probabilité sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mu(\{x\})$ est nul si x est un entier relatif vérifiant $|x| > K$. Considérons une suite $\{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi μ. Ceci signifie que pour tout n, si x_1, x_2, ..., x_n sont dans $\mathbb{Z}$,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mu(\{x_1\})\,\mu(\{x_2\}) \ldots \mu(\{x_n\}).$$

D'après l'hypothèse faite sur μ on peut supposer que pour tout n, $|X_n| \leqslant K$.

Si A est une partie de Ω on note 1_A l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par $1_A(\omega) = 1$ si ω est dans A, $1_A(\omega) = 0$ sinon.

On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

I

1° Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$E\{f(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n)\} = E\{f(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1)\}.$$

2° Pour tout n on pose :

$$A_n = \{\omega \in \Omega\,;\, S_n(\omega) \neq S_0(\omega),\, S_n(\omega) \neq S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega) \neq S_{n-1}(\omega)\}$$

$$B_n = \{\omega \in \Omega\,;\, S_1(\omega) \neq 0,\, S_2(\omega) \neq 0, \ldots, S_n(\omega) \neq 0\}$$

autrement dit :

$$A_n = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{S_n \neq S_k\} \qquad \text{et} \qquad B_n = \bigcap_{k=1}^{n} \{S_k \neq 0\}$$

a. Montrer que pour tout n, $P(A_n) = P(B_n)$.

b. En déduire que la suite de réels $\{P(A_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ converge.

Dorénavant on notera α la limite de cette suite.

3° Pour chaque n on définit la variable aléatoire R_n par :

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$$

a. Montrer que pour tout ω de Ω, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'éléments distincts de l'ensemble $\{S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}$. Calculer $P(R_n = 1)$.

b. Montrer que si $1 \leqslant m \leqslant n$

$$n\alpha \leqslant E(R_n) - 1 \leqslant \sum_{k=1}^{m} P(A_k) + (n-m)\,P(A_{m+1}).$$

En déduire que $\frac{1}{n} E(R_n)$ tend vers α quand n tend vers l'infini.

c. Montrer que si α est nul, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\frac{R_n}{n} \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers zéro, quand n tend vers l'infini.

d. Vérifier que réciproquement, si pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\frac{R_n}{n} \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, alors α est nul.

II

Dans tout ce paragraphe on suppose que $E(X_1)$ est strictement positif.

1° Pour tout réel t on pose $\varphi(t) = E\{e^{-tX_1}\}$.

a. Montrer que si $t \geqslant 0$

$$P(S_n \leqslant 0) \leqslant E\{e^{-tS_n}\} \leqslant \varphi(t)^n.$$

b. En étudiant la fonction φ au voisinage de zéro, en déduire qu'il existe un réel r vérifiant $0 < r < 1$ tel que pour tout entier n,

$$P(S_n \leqslant 0) \leqslant r^n.$$

.../...

2° Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ définissons les variables aléatoires I_n et M_n par, si ω est dans Ω,

$$I_n(\omega) = \text{Min}\{S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}$$
$$M_n(\omega) = \text{Max}\{S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}$$

($I_n(\omega)$ est donc le plus petit des entiers relatifs $S_0(\omega), \ldots, S_n(\omega)$, $M_n(\omega)$ le plus grand).

a. Montrer que $-nK \leqslant I_n \leqslant 0$.

b. Si p est un entier de $]0, n[$ soit

$$C_p = \bigsqcup_{i=p+1}^{n} \{\omega \in \Omega;\ S_i(\omega) \leqslant 0\},$$

montrer que $E\left(\frac{I_n}{n}\right) \geqslant -K P(C_p) + \frac{1}{n} E(I_p)$.

c. En déduire que $\frac{1}{n} E(I_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

d. Montrer que si x est un entier négatif

$$P(S_n - M_n < x) = P(I_n < x).$$

e. En déduire que $E(S_n - M_n) = E(I_n)$.

f. Calculer la limite de $\frac{1}{n} E(M_n)$ quand n tend vers l'infini.

g. Majorer R_n en fonction de $M_n - I_n$.

h. Montrer que α est inférieur ou égal à $E(X_1)$.

3° On suppose de plus que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\mu(\{k\})$ est nul.

a. Montrer que pour tout n $R_n \geqslant M_n$.

b. Calculer α en fonction de $E(X_1)$.

III

Dans ce paragraphe on suppose que $E(X_1)$ est nul.

1° *a.* Montrer que si t est un réel strictement positif, il existe un réel r vérifiant $0 < r < 1$ tel que, pour tout entier n,

$$P(S_n \leqslant -nt) \leqslant r^n.$$

b. En déduire que $\frac{1}{n} E(I_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

2° Calculer α.